EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN
WISKUNDELERAREN, VAN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

44e JAARGANG 1968/1969

IX — 1 JUNI 1969

INHOUD

WOLTERS-NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 7,50.

De leden van *de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. De contributie bedraagt f 9,00 (abonnement inbegrepen), over te schrijven naar postrekening 143917, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voorzover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Heemstede; postrekening 87185.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 261036 te Voorburg.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Opgaven voor deelname aan de Leesportefeuille met buitenlandse tijdschriften aan G. A. J. Boost, Parklaan 107 A, Roosendaal (NB).

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan G. Krooshof te Groningen.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Naaldbanden: Verkrijgbaar bij de uitgever door storting van f 5,50 op giro nr. 1308949; vermelden: .... ex naaldband(en) Euclides.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 *afdrukken* verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

ALS $l_1 \perp l_2$, DAN $m_1 m_2 = -1$?

door

Drs. L. VAN DEN BROM

Amsterdam

Enige opmerkingen naar aanleiding van het tweede vraagstuk Goniometrie en Analytische Meetkunde van het schriftelijk eindexamen 1966 en de daarbij voor de H.B.S. gestelde normen.

Eerst de opgave:

2. XOY is een rechthoekig assenstelsel.

Gegeven is de parabool $y^2 = 2x$.

a. Voor welke punten P van de lijn $x - y + 2 = 0$ geldt, dat de poollijn van P ten opzichte van deze parabool loodrecht staat op de lijn OP?

b. Bepaal de verzameling van de toppen van de parabolen, die de gegeven parabool in het punt (2,2) loodrecht snijden en die een symmetrie-as hebben, die evenwijdig is met de X-as of met de X-as samenvalt.

en de normen voor de vaststelling van het cijfer voor het schriftelijk werk bij het eindexamen H.B.S.-B in 1966, voor dit vraagstuk:

Voor elk vraagstuk wordt één punt toegekend, vermeerderd met maximaal de volgende aantallen punten voor de onderdelen:

2. voor *a*: 4 punten; voor het punt $(-1,1)$ 3 punten;
voor het punt $(-2,0)$ 1 punt;

voor *b*: 5 punten; voor het niet-uitzonderen van het punt (2,2) ½ punt aftrekken.

Nu de oplossing van onderdeel *a*:

Voor het punt P, op de lijn $x - y + 2 = 0$, kiezen we de coördinaten $(\lambda, \lambda + 2)$. De vergelijking van de poollijn van P ten opzichte van $y^2 = 2x$ krijgt dan de gedaante: $x - (\lambda + 2)y + \lambda = 0$ (1), en die van de lijn OP: $(\lambda + 2)x - \lambda y = 0$ (2). De loodrechte stand van twee lijnen is, in de analytische meetkunde, gelijkwaardig met het 0 zijn van het inwendig produkt van de normaalvectoren van deze lijnen. De onderling loodrechte stand van de lijnen met vergelijkingen (1) en (2), kunnen we dus vertalen in: $(\lambda + 2) + (\lambda + 2)\lambda = 0$, een

vergelijking met de wortels — 1 en — 2, corresponderend met de punten (— 1,1) en (— 2,0).

Als men bij het opstellen van „normen" voor dit vraagstuk slechts oog heeft voor bovenstaande oplossing, dan zal men er niet toekomen de twee punten afzonderlijk te noemen. Beide punten komen gelijk te voorschijn.

De „normisten" hebben kennelijk ook (of alleen?) oog gehad voor een oplossing waarbij men werkt met de richtings-coëfficiënt. Bij die oplossing krijgen we namelijk:

De richtings-coëfficiënten van de lijnen met vergelijkingen (1) en (2), zijn resp. $\frac{1}{\lambda + 2}$ en $\frac{\lambda + 2}{\lambda}$. Nu passen we toe de stelling: „Als twee lijnen loodrecht op elkaar staan en de richtings-coëfficiënten van beide bestaan, dan is het product van de richtingscoëfficiënten — 1 ", hetgeen oplevert $\frac{1}{\lambda + 2} \cdot \frac{\lambda + 2}{\lambda} = -1$, mits $\lambda \neq 2$ en $\lambda \neq 0$. Als wortel van deze laatste vergelijking vinden we — 1, corresponderend met het punt (— 1,1). En daarna moeten nog de parameterwaarden — 2 en 0 onderzocht worden, corresponderend met de punten (— 2,0) en (0,2). Het eerstgenoemde punt voldoet aan de gestelde eisen, het tweede niet.

Met deze laatste oplossing voor ogen had men toch zeker in de beoordeling het al of niet controleren van het punt (0,2) moeten opnemen.

Het niet vinden van het punt (— 2,0), wordt door de opstellers van de „normen" zeer mild beoordeeld. Deze mildheid komt echter in een beter perspectief, indien men in dit verband de boeken Analytische Meetkunde, bestemd voor het middelbaar onderwijs, naslaat.

Daartoe zijn door mij geraadpleegd de volgende leerboeken, die ik in het vervolg met de betreffende letteraanduiding zal noemen. Tevens heb ik, zover mij bekend, vermeld waar deze boeken in Euclides besproken zijn.

(A) C. J. Alders,
Inleiding tot de Analytische Meetkunde, 21e-25e druk, Noordhoff 1965. (besproken in Euclides 35, blz. 14)

(BKS) Dr. J. Bijl, Dr. D. Kijne, W. J. H. Salet,
Basis voor de Analytische Meetkunde, Meulenhoff 1959. (Euclides 36, blz. 27)

(DH) Dr. A. van Dop en Dr. A. van Haselen,
Analytische Meetkunde, 3e druk, Wolters 1964. (Euclides 36, blz. 205)

(H) Drs. P. M. van Hiele, Dra. D. van Hiele-Geldof,
Werkboek der Analytische Meetkunde, Muusses 1953.

(K) J. M. Keizer,
Analytische Meetkunde, van Dishoeck 1959.

(L) Drs. P. E. Lepoeter,
Gids voor de Analytische Meetkunde van de B-afdelingen.
Meulenhoff 1963. (Euclides 40, blz. 59)

(S1) Dr. D. J. E. Schrek (verzorgd door Drs. H. Pleysier)
Analytische Meetkunde, 16e druk, Noordhoff 1966.

(S2) Dr. D. J. E. Schrek (verzorgd door Drs. H. Pleysier)
Beknopte Analytische Meetkunde, 4e druk, Noordhoff 1964.
(Euclides 35, blz. 80 en Euclides 36, blz. 31)

(V) Dr. P. G. J. Vredenduin,
Analytische Meetkunde, 8e druk, Wolters 1965.
(Euclides 36, blz. 30)

(Wa) E. J. Wasscher,
Analytische Meetkunde, van Thijn's Wiskundige Leergang,
Wolters 1955.

(Wij) P. Wijdenes,
Beknopte Analytische Meetkunde, Noordhoff.
(Euclides 39, blz. 127)

Bij deze controle heb ik niet alleen gelet op de behandeling van de loodrechte stand, maar heb ik tevens gekeken naar de behandeling van de evenwijdigheid van lijnen. Daar het mogelijk is dat ik één en ander uit het verband gerukt heb, raad ik de lezer aan de genoemde boeken zelf te beoordelen op hun merites ten aanzien van het onderhavige vraagstuk. We vinden dan de volgende opmerkingen en stellingen:

(A) § 9, blz. 9:

> Toch kiezen we voor de vergelijking van een willekeurige lijn dikwijls $y = mx + n$, omdat die maar twee coëfficiënten bevat. Dit kan echter tot onvolledigheden leiden, die men natuurlijk moet onderzoeken.

De derde coëfficiënt, die van y, die doordat hij vastgelegd is op 1, juist de onvolledigheden veroorzaakt, ziet de auteur kennelijk over het hoofd. Het onderzoek van de onvolledigheden vergeet de auteur zelf in § 11 en § 14.

§ 11, blz. 11:

> Twee lijnen zijn alleen dan evenwijdig, als zij dezelfde r.c. hebben, en niet samenvallen.

§ 14, blz. 13:

Omgekeerd: als $\varphi = 90°$, dan is $m_1 m_2 = -1$.

Uitspraken, die in hun algemeenheid, onjuist zijn. De vermelding van het uitzonderingsgeval had dit op kunnen vangen.

(BKS) Volgens het voorbericht zien de auteurs grote voordelen in het gebruik van vektoren bij het onderwijs in de analytische meetkunde. Het is jammer dat zij deze voordelen niet hebben kunnen uitbuiten. Hun methode was anders te zeer gaan afwijken van de gebruikelijke. Ook de aard van de eindexamenvraagstukken zal de auteurs wel weerhouden hebben, om al te revolutionair te zijn.

Als men in § 18 het inwendig produkt heeft ingevoerd, valt men in § 19 weer terug op de richtings-coëfficiënt, om daarna in § 20 de normaalvector van een lijn in te voeren. Een andere volgorde en het slechts terzijde noemen van de richtings-coëfficiënt, ware wenselijker geweest.

Dit is echter het enige van de door mij nageslagen leerboeken, waarin bij de evenwijdigheid (§ 41) en de loodrechte stand (§ 19) van lijnen, men zich de moeite neemt te vermelden, dat de richtings-coëfficiënt wel eens niet kan bestaan.

(DH) § 7, blz. 13:

Twee niet samenvallende rechten met gelijke richtingscoëfficiënt zijn evenwijdig.

en

Evenwijdige rechten hebben gelijke richtingscoëfficiënten.

Ook in dit boek wordt hier niet vermeld dat deze laatste stelling in zijn algemeenheid aanvechtbaar is.

Het wordt nog erger bij de loodrechte stand.

§ 11, blz. 19:

Twee rechten staan loodrecht op elkaar als $m_1 m_2 = -1$.
En omgekeerd:
Als voor de richtingscoëfficiënten m_1 en m_2 van twee rechten geldt: $m_1 m_2 = -1$, staan deze rechten loodrecht op elkaar.

Dat men in de omgangstaal, en in de wiskunde ook wel om stilistische redenen, een implicatie de vorm "*B*, *als A*" geeft, blijkt niet zonder gevaar als men zo'n implicatie gaat omkeren. De omkering is dan "*A*, *als B*".

(H) blz. 20. Regel 14:

Twee lijnen staan loodrecht op elkaar, als het product van hun richtingscoëfficiënten gelijk is aan -1.

Deze regel wordt herhaald op blz. 25 en blz. 106.

blz. 64:

Bewijs, dat bovengenoemde lijnen loodrecht op elkaar staan, als $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Nergens heb ik in dit werkboek de omkeringen van deze stellingen gevonden. Deze omkeringen zijn toch zeker nodig, als we bij twee loodrecht op elkaar staande lijnen in de meetkunde, het algebraïsch aequivalent zoeken.

(K) § 4, blz. 6:

Evenwijdige lijnen hebben dezelfde richtingscoëfficiënt en omgekeerd.

Zonder te blozen gaat de auteur dan verder.:

Volkomen algemeen is pas de vergelijking $ax + by + c = 0$; deze stelt, in tegenstelling met $y = mx + n$, ook lijnen voor evenwijdig aan de Y-as (als $b = 0$ nl.).

§ 10, blz. 9:

als $m_1m_2 = -1$ staan de twee lijnen loodrecht op elkaar en omgekeerd.

Het zal wel het streven naar beknoptheid zijn, dat de auteur doet afzien van de vermelding, dat hier het omgekeerde niet algemeen geldt.

(L) Evenwijdige lijnen worden o.a. in § 8, blz. 16 en 17, behandeld met de algemene vergelijking $ax + by + c = 0$. Jammer dat de auteur aan het slot van § 8 dan nog opmerkt:

en natuurlijk ook:
De richtingscoëfficiënten van twee evenwijdige lijnen zijn gelijk ($m_1 = m_2$).

§ 9, blz. 20:

Als twee lijnen loodrecht op elkaar staan, dan is het product van hun richtingscoëfficiënten gelijk aan -1.

Ook deze auteur neemt zich niet de moeite het niet algemeen geldig zijn van deze stellingen op te merken. En de omgekeerden, die het ons mogelijk maken om van de algebra naar de meetkunde te komen, worden niet expliciet genoemd.

(S1) § 23, blz. 35:

. . . zodat $m_1 = m_2$ de voorwaarde voor evenwijdigheid voorstelt . . .

en

. . .: $m_1m_2 = -1$, welke betrekking dus de voorwaarde voor loodrechte stand betekent.

Wat hier bedoeld wordt met *„de voorwaarde"* laat zich raden. Bewezen wordt slechts dat dit voldoende voorwaarden zijn voor resp. evenwijdigheid en loodrechte stand.

Daarna wordt de verschrikkelijke formule $tg\varphi = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$ toe- toegepast op de lijnen met vergelijkingen $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ en $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, zonder daarbij te stellen $B_1 \neq 0$ en $B_2 \neq 0$, om te komen tot:

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, als „de voorwaarde" voor evenwijdigheid en $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$, als „de voorwaarde" voor loodrechte stand.

(S_2) § 22 stemt overeen met § 23 van (S_1).

(V) Ook in dit boek wordt in § 8, blz. 12, zonder meer de algemeen onjuiste uitspraak gedaan:

De voorwaarde voor loodrechte stand van twee lijnen is $m_1m_2 = -1$.

Uit het bewijs blijkt hier, dat bedoeld is een noodzakelijke en voldoende voorwaarde.

Wel wordt in § 5 gesteld, dat de vergelijking van de rechte lijn van de vorm $y = mx + q$ of van de vorm $x = a$ is.

(Wa) § 11, blz. 14:

$l_1 \perp l_2$, als $m_1m_2 = -1$

een algemeen geldige uitspraak. Maar hoe moeten we uit de meetkunde met $l_1 \perp l_2$ in de algebra komen?

(Wij) Bij de behandeling van de evenwijdigheid van twee lijnen wordt in § 6 gewerkt met de algemene vergelijking $ax + by + c = 0$. Jammer genoeg wordt dan toch weer overgegaan op de richtingscoëfficiënt $-a/b$.

§ 8, blz. 27:

Het produkt van de richtingscoëfficiënten van twee onderling loodrechte lijnen is gelijk aan -1.

Ook in dit boek wordt het uitzonderingsgeval niet vermeld. En de omkering ontbreekt, zodat we eigenlijk met de gegeven theorie, uit de algebra niet naar de meetkunde kunnen gaan.

Als we slechts afgaan op de theorie, die de auteurs van de schoolboeken Analytische Meetkunde geven, dan komen we tot de conclusie, dat alleen de Heren Bijl, Kijne en Salet volgens de normen het maximaal aantal punten voor onderdeel *a* hadden gekregen.

Nu onderdeel *b*. Eerst weer een oplossing.

Parabolen, die een symmetrie-as hebben, die dezelfde richting heeft als de x-as, hebben tot vergelijking:

$$(y - y_0)^2 = 2p\,(x - x_0) \tag{3}$$

(hierin is (x_0, y_0), de top en p de parameter van de parabool)

Die parabolen moeten $y_2 = 2x$ in (2,2) loodrecht snijden, (2,2) moet dus aan (3) voldoen:

$$(2 - y_0)^2 = 2p\,(2 - x_0) \tag{4}$$

Met de vergelijking

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_1, y_1)} (x - x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_1, y_1)} (y - y_1) = 0$$

voor de raaklijn aan de kromme met vergelijking $f(x,y) = 0$ in het punt (x_1, y_1), $(f(x_1, y_1) = 0)$, volgt nu:

De raaklijn aan (3) in (2,2) heeft tot vergelijking:

$$px - (2 - y_0)y - 2y_0 - 2p + 4 = 0, \textit{ niet } (p = 0 \textit{ en } y_0 = 2) \tag{5}$$

De raaklijn aan $y^2 = 2x$ in (2,2):

$$x - 2y + 2 = 0 \tag{6}$$

(voor $p = 0$ en $y_0 = 2$ is (5) onbepaald)

De loodrechte stand van de lijnen met vergelijkingen (5) en (6) is gelijkwaardig met:

$$p + 2(2 - y_0) = 0, \textit{ niet } (p = 0 \textit{ en } y_0 = 2) \tag{7}$$

Het elimineren van p uit (4) en (7) levert op:
$(2 - y_0)^2 = -4(2 - y_0)(2 - x_0)$, daar echter $y_0 \neq 2$, krijgen we na het z.g. lopend maken van de coordinaten, als vergelijking van de gevraagde verzameling:

$$4x + y - 10 = 0, \ (x,y) \neq (2,2) \tag{8}$$

Als men (5) en (6) opstelt met behulp van een formule (bijv. het half-substitueren), die men heeft afgeleid door een raaklijn aan een kromme op te vatten als een lijn, die twee samenvallende snijpunten met de kromme gemeen heeft, of rechtstreeks met de z.g. discriminant-methode, dan vervalt bij (5) de voorwaarde *niet* ($p = 0$ *en* $y_0 = 2$) en moet men het geval $p = 0$ en $y_0 = 2$ nog in beschouwing nemen.

Voor $p_0 = 0$ *en* $y_0 = 2$ wordt (3) de ontaarde parabool $(y - 2)^2 = 0$. Iedere lijn door (2,2), heeft twee „samenvallende snijpunten" met

$(y - 2)^2 = 0$ gemeen en kan men opvatten als „raaklijn". Met deze opvatting maakt $(y - 2)^2 = 0$ met $y^2 = 2x$ iedere gewenste hoek, dus ook een rechte. Dan kan men verder nog ieder punt van de ontaarde parabool $(y - 2)^2 = 0$ opvatten als top van die parabool.

Zo verkrijgt men, door toevoeging van de factor $(y - 2)$ aan (8), als vergelijking van de gevraagde verzameling:

$$(y - 2)(4x + y - 10) = 0 \tag{8a}$$

In de opgave spreekt men over parabolen, die *een* symmetrie-as hebben, met als richting die van de x-as. In de opgave staat niet: „*de* symmetrie-as". De ontaarde parabool $(x - 2)^2 = 0$, heeft niet alleen $x - 2 = 0$ tot symmetrie-as, maar ook iedere lijn $y = c$ is *een* symmetrie-as. Met dezelfde opvattingen, die bij (8a) de factor $(y - 2)$ opleverde, krijgt men daar nog bij de factor $(x - 2)$.

Zo komen we dan tot:

$$(x - 2)(y - 2)(4x + y - 10) = 0 \tag{8b}$$

De opstellers der normen kozen voor (8): voor het niet-uitzonderen van het punt (2,2) ½ punt aftrekken.

Laten we nu eens gaan kijken of de reeds genoemde leerboeken de candidaat een ondubbelzinnig argument geven om tot (8) te besluiten.

In de eerste plaats kunnen we tot (8) komen, door $p = 0$ niet toe te laten in het stelsel (3). Echter geen van de gecontroleerde leerboeken maakt bij de theorie van de parabool een opmerking over het geval $p = 0$. Wel komt in (H), (K), (V), (Wa) en (Wij), in de theorie, of als vraagstuk voor *Alle parabolen zijn gelijkvormig*. Mag men daar dan uit concluderen dat de auteurs van die boeken onder een parabool een *echte* parabool verstaan? In (A), (H), (S_1), (S_2), (Wa) en (Wij) wordt elders nog wel melding gemaakt van ontaarde kegelsneden. Maar of we $p = 0$ al dan niet bij het eindexamenvraagstuk moeten toelaten, kunnen we uit geen van de leerboeken duidelijk opmaken.

Aan de andere kant had men één en ander kunnen opvangen door in de opgave te vragen naar de toppen van *echte* parabolen. Het was in 1966 niet de eerste keer, dat een dergelijke onderscheiding nodig was om een eindexamenvraagstuk ondubbelzinnig te kunnen oplossen. (Zie Gymnasium 1958). En ook niet de laatste keer (vhmo 1969).

Ook het begrip *raaklijn* had een aanwijzing kunnen opleveren om tot (8) te besluiten. Voor de raaklijn aan een kromme komen we, meer of minder nadrukkelijk geformuleerd, twee definities tegen:

1) Het is een lijn, die twee samenvallende punten met de kromme gemeen heeft. (Deze definitie geeft bij de kegelsneden dan aanleiding tot de z.g. Discriminant-methode.)

2) De raaklijn aan de kromme met vergelijking $y = f(x)$, in het punt (x_1, y_1) van de kromme, heeft de vergelijking:

$$y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1} (x - x_1).$$

In (A), (DH), (H), (K), (L), (S_1) en (S_2) worden beide definities gebruikt, zonder dat men ingaat op de gelijkwaardigheid. Alleen (A) geeft bij gebruik van de tweede definite een waarschuwing voor het geval de raaklijn wel bestaat, maar $\frac{dy}{dx}$ niet.

In (BKS), (V) en (Wij) wordt alleen gebruik gemaakt van de „discriminant-methode''. Met die methode komt men in eerste instantie tot (8), en als men ook de ontaarde parabolen in beschouwing neemt, moet men tot (8a), resp. (8b) besluiten. Geen van de leerboeken geeft een ondubbelzinnig argument, in de behandeling van de raaklijn, om aan (8) de voorkeur te geven. De leerboeken doen mij neigen tot (8b).

Ten aanzien van het begrip *hoek tussen twee krommen*, zonder dat kan men onderdeel *b* niet maken, merk ik nog op dat niet alle leerboeken a.m. het expliciet geven. (Wij) blinkt op dit punt uit; met behulp van het register was die definitie snel te vinden.

Symmetrie en *symmetrie-as* worden ook in onze a.m.-boeken stiefmoederlijk behandeld. Alleen (H) vestigt op dat onderwerp expliciet de aandacht.

De oogst is wel schraal. Geen enkel boek, dat in 1966 in gebruik was voor de Analytische Meetkunde, was voor onderdeel *b* bevredigend.

Conclusies en Aanbevelingen

1) Onderdeel *a* van het besproken vraagstuk is een voorbeeld, dat aangeeft dat vectoren in de Analytische Meetkunde zekere voordelen hebben. Gebruikmakend van vectoren in de a.m. is het vaker mogelijk de stellingen als gelijkwaardigheden te formuleren, zonder uitzonderingen daarbij te hoeven vermelden. Het gebruikmaken van de inhomegene richtings-coëfficiënt, in plaats van een richtings-vector of normaal-vector, kan in bepaalde gevallen rekenvoordeel leveren. Maar men dient dan wel te letten op de mogelijke uitzonderingsgevallen.

2) De behandeling van het begrip raaklijn aan een kromme dient men zeker nader te bezien.

Persoonlijk zie ik, ook voor het voortgezet onderwijs, niet zulke

grote bezwaren om de raaklijn in een punt (x_1, y_1) van een kromme met vergelijking $f(x,y) = 0$, te definiëren als de lijn met vergelijking:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_1,y_1)} (x - x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_1,y_1)} (y - y_1) = 0. \qquad (9)$$

Het trucje is de leerlingen even goed of even slecht te leren als het trucje „half-substitueren" bij de kegelsneden, met het voordeel dat het zich niet beperkt tot krommen van de tweede graad.

Dat men de vergelijking van de raaklijn in die gedaante eerst beschikbaar heeft als de leerlingen de techniek van het partiëel-differentiëren beheersen, lijkt mij niet zo'n bezwaar. Ook zonder raaklijnen kan men de leerlingen wegwijs maken in de methoden van de Analytische Meetkunde. De gedaante $y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1} (x - x_1)$, met de bekende waarschuwing, komt trouwens eerde ter sprake.

Ik wil zeker de hier gedane suggestie niet propageren als *de* didactische oplossing, maar wel kan men in overweging nemen of het aannemelijk maken van (9) als definitie van de raaklijn, niet één der doelen van het onderwijs in de analyse, bij het v.w.o., kan zijn.

Wel heb ik de indruk dat verschillende auteurs op het gebied van de middelbare-school-a.m. niet doordrongen zijn van het feit, dat het begrip raaklijn, in zijn algemeenheid, zich niet leent voor een synthetische behandeling. Als men dit toch probeert, dan moet men een beschouwing leveren ontleend aan de analyse, die zeker instructief is voor de leerlingen om eens te zien. (Zie Streefkerk, Nieuw Meetkundeboek III, Aanhangsel noot III.)

Maar zo men de raaklijn aan cirkel, parabool, ellips en hyperbool synthetisch wil definiëren, laat men het dan zo doen dat de definities specifiek zijn voor de betreffende kromme. Een leerling die in de planimetrie geleerd heeft: „Een lijn, die één punt met een cirkel gemeen heeft heet een raaklijn aan de cirkel", kan men het toch niet euvel duiden, als hij beweert dat een parabool, in ieder punt, twee raaklijnen heeft, n.l. de gebruikelijke en één in de richting van de as. Hij heeft gewoon het woord cirkel vervangen door parabool.

Voor gebruikers van een serie, van één auteur, kan het interessant zijn, de behandeling van de raaklijn in de verschillende vakken met elkaar te vergelijken.

3) Het verdient aanbeveling implicaties de gedaante „*Als* . . ., *dan* . . ." te geven. En mocht men om bepaalde redenen het onderstelde achter het gestelde plaatsen, laat men dan voorzichtig zijn en niet vervallen in een fout zoals in (DH) § 11, blz. 19.

4) Het is mij opgevallen, dat in verschillende leerboeken definities,

zelfs van belangrijke begrippen, impliciet worden ingevoerd. Zelfs komt het voor dat een begrip voor het eerst ter sprake komt in een vraagstuk. De duidelijkheid wordt ten zeerste gediend door definities en methoden expliciet te brengen. Ook het toevoegen van een register aan een leerboek, zal het niet alleen de criticus makkelijker maken de definities te vinden.

5) De critieken, die men ziet verschijnen over middelbare-schoolboeken, zijn vaak of welwillend, of neutraal. Ik heb voor de geïnteresseerde lezer bij de opsomming van de boeken vermeld waar deze in Euclides besproken zijn. Een felle critiek, zeker nu zich veranderingen in het wiskunde-leerplan gaan voltrekken, zal zeker bijdragen tot de verhoging van de kwaliteit van het onderwijs.

De hierboven gevolgde methode, alle leerboeken over een bepaald onderwerp, aan de hand van een vraagstuk door te lichten, lijkt mij een methode die feilen aan het licht kan brengen, waar men overheen leest, als men de boeken één voor één van begin tot eind doorneemt.

Het instellen van een instantie, die druk op uitgevers en schrijvers kan uitoefenen, teneinde gesignaleerde fouten in schoolboeken te laten verdwijnen, lijkt mij het overwegen waard. Een soort *consumentenbond* voor gebruikers van schoolboeken.

6) Dat aan landelijke correctie-normen bezwaren kleven blijkt uit het besproken vraagstuk duidelijk. In het begin zijn al opmerkingen over de normen voor het onderdeel *a* gemaakt. Onderdeel *b* levert een sterker argument tegen de normen. Het hangt geheel af van de gehanteerde definities of het punt (2,2) (en met (2,2) de lijn $y - 2 = 0$, resp. ook nog de lijn $x - 2 = 0$) tot de oplossing behoort. Toch wordt ongenuanceerd gesteld: voor het niet-uitzonderen van het punt (2,2) ½ punt aftrekken.

Landelijk centraal opgestelde schriftelijke examenopgaven hebben een verstarrende invloed op het onderwijs. Men zal zich bij het opstellen van dergelijke opgaven beperken tot dat deel van de stof dat landelijk schriftelijk examineerbaar is. Daar deze vorm van examineren ook nog bijdraagt tot het stellen van het examen als doel van het onderwijs, zal het onderwijs, zich richtend op dat examen, zich gaan beperken tot dat deel van de stof dat landelijk schriftelijk examineerbaar is.

De normen versterken dan nogmaals dat effect.

7) Tot slot wil ik nog opmerken dat bij mij, niet alleen door het bespreken van het vraagstuk Analytische Meetkunde 1966 2), de indruk is ontstaan dat aan het *traditionele*, wat dat ook moge zijn, wel wat te verbeteren viel, of valt. Heeft het *traditionele* eigenlijk wel die kans gekregen, dat het waard was, of is?

UITBREIDING VAN **N** TOT **G** EN **Q**

door

Dr. P. G. J. VREDENDUIN

Oosterbeek

Een veel gevolgde methode om van **N** over te gaan op **G** is de volgende. Vorm de verzameling van geordende paren (a, b) met $a \in \mathbf{N}$ en $b \in \mathbf{N}$. Verdeel deze paren in ekwivalentieklassen, die bepaald worden door de ekwivalentierelatie

$$(a, b) \sim (c, d) =_{\mathrm{df}} a + d = b + c.$$

Deze ekwivalentieklassen heten gehele getallen.

Op analoge manier vormt men de rationale getallen. De geordende paren (a, b) met $a \in \mathbf{G}$ en $b \in \mathbf{G}\backslash\{0\}$ worden verdeeld in ekwivalentieklassen, die bepaald worden door de ekwivalentierelatie

$$(a, b) \sim (c, d) =_{\mathrm{df}} a \cdot d = b \cdot c.$$

Deze ekwivalentieklassen heten rationale getallen.

In **G** en **Q** worden de volgorde, de optelling en de vermenigvuldiging gedefinieerd. Er blijkt dan, dat **N** isomorf is met een deelverzameling van **G** en evenzo dat **G** isomorf is met een deelverzameling van **Q**. Deze isomorfie brengt ons ertoe van een uitbreiding van **N** tot **G** en een uitbreiding van **G** tot **Q** te spreken.

Mathematisch is deze methode bijzonder fraai. Verder is hij zeer geschikt om ons leraren een minderwaardigheidscomplex te bezorgen, doordat we de overtuiging krijgen, dat onze methode om de leerlingen met **G** en **Q** vertrouwd te maken, erg onwetenschappelijk is. Want inderdaad vinden we, met name bij onze manier van invoering van de gehele getallen weinig of niets terug van de hierboven geschetste werkwijze. Doen we het dus alleen maar goed, als we ook met paren gaan werken?

Er zijn twee methoden om te onderzoeken of onze klassieke methode wetenschappelijk verantwoord is. We kunnen een bepaalde wetenschappelijke fundering van **G** kiezen en dan merken, dat ons denken in de klas hier niet mee parallel loopt. Dat zegt nog niets. We moeten nagaan, of er geen andere mathematisch verantwoorde methode is om **G** in te voeren, die wel met onze schoolmethode overeenkomt.

De bedoeling van dit artikel is te laten zien, dat het stellig mogelijk is **N** uit te breiden tot **G** en **G** tot **Q** op een manier, die wetenschappelijk correct is en een grote mate van overeenstemming vertoont met schoolmethoden.

1. Ik moet beginnen, om het vervolg duidelijk te kunnen maken, met de natuurlijke getallen niet zonder meer als uitgangspunt te nemen, maar ze opnieuw te funderen. Zoals bekend is dit langs axiomatische weg gedaan door Peano. Zijn axioma's luiden in moderne versie als volgt.
Uitgangspunt: een verzameling **N**, een object 0, een afbeelding f.
Axioma's:

N1. $0 \in \mathbf{N}$.
N2. f is een bijectie van **N** naar $\mathbf{N} \setminus \{0\}$.
N3. $V \subset \mathbf{N} \wedge 0 \in V \wedge f(V) \subset V \Rightarrow V = \mathbf{N}$.

N3 is het axioma van de volledige inductie.

Intuïtief geïnterpreteerd komen de axioma's neer op het volgende. Een of andere verzameling **N** heeft als element 0 (N1). Dientengevolge zijn van deze verzameling ook element $f(0)$, $f(f(0))$, $f(f(f(0)))$, ... (N2). Omdat f een bijectie is, zijn al deze elementen verschillend. En ten gevolge van N3 bestaat **N** uit niet meer dan deze elementen. (Deze interpretatie is onwiskundig, maar kan de lezer helpen bij het lezen van de axioma's.)

De axioma's N1–3 bepalen dus een zekere structuur, namelijk de structuur van een sequentie (een oneindig voortlopende serie dingen, waarvan niets anders bekend is dan hun opvolging). Het gebruik van de aanduiding **N** is dus prematuur; we hebben nog niet te maken met natuurlijke getallen.

Nu wordt een volgorde gedefinieerd, een optelling en een vermenigvuldiging en eerst daarna is de structuur zodanig verrijkt, dat het gebruikelijk is te spreken van natuurlijke getallen.

2. **N**, + is een semigroep. De wiskundige zegt, dat het geen groep is, doordat de inversen van de elementen van **N** ontbreken. De leraar zegt, dat hij geen getal heeft, dat aanduidt 3—7, dat aanduidt 4 te kort, dat aanduidt 4 onder 0, of iets dergelijks. De leraar breidt dan zijn getalsysteem uit. De vraag is nu: hoe kan de wiskundige **N** uitbreiden tot een ruimere verzameling, waarin deze inversen wel aanwezig zijn? Dit kan op de volgende manier.

Aan het uitgangspunt **N**, 0, f voegen we toe: een verzameling **G**, een afbeelding g.

Nieuwe axioma's:

G1. $\mathbf{N} \subset \mathbf{G}$.
G2. g is een bijectie van $\mathbf{N}\backslash\{0\}$ naar $\mathbf{G}\backslash\mathbf{N}$.

Intuïtieve interpretatie. We beschikten over de verzameling $\mathbf{N}$ met elementen: 0, 1, 2, 3, . . . (duidelijk is, dat 1, 2, 3, . . . verkorte schrijfwijzen zijn voor $f(0)$, $f(f(0))$, $f(f(f(0)))$, . . .). Volgens G2 worden hieraan nieuwe elementen toegevoegd, nl. $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, . . ., die onderling alle verschillend zijn.

De axioma's N1–3, G1–2 bepalen dus een structuur, die men het meest suggestief kan weergeven door

$$\ldots \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \ldots$$

Het gebruik van de aanduiding $\mathbf{G}$ is weer prematuur. De verzameling van de gehele getallen ontstaat eerst, als we een volgorde, een optelling en een vermenigvuldiging definiëren. Nadat dit geschied is, zal blijken, dat $g(x)$ voor elke $x \in \mathbf{N}\backslash\{0\}$ de inverse is van x voor de operatie $+$.

Deze methode van invoeren van de „nieuwe" getallen is wetenschappelijk correct en loopt parallel met de methode, die in de schoolwiskunde vaak gevolgd wordt.

3. $\mathbf{G}\backslash\{0\}, \cdot$ is een semigroep. De wiskundige zegt, dat de inversen van de elementen van $\mathbf{G}\backslash\{0\}$ ontbreken (behalve die van 1 en -1). En daarmee is hij er niet. Want na toevoeging van deze inversen ontstaat nog geen groep. Hoe komt dit?

Binnen $\mathbf{G}$ zijn de vergelijkingen

$$2x = 3 \text{ en } 3x = 2$$

beide vals. Voeg toe de inverse 2^{-1} van 2. Dan moet $2^{-1} \cdot 3$ gevormd kunnen vorden. Er zijn twee mogelijkheden:

$2^{-1} \cdot 3 = x$ en x is een oud getal (dus een getal van $\mathbf{G}$). Dan zou $3 = 2x$ en dat kan niet.

$2^{-1} \cdot 3 = x$ is een nieuw getal. Dan is x de inverse van een getal y uit $\mathbf{G}$. Dus zou $2^{-1} \cdot 3 = y^{-1}$ en daarom $3y = 2$ en dat kan ook niet.

We zijn dus wel verplicht nieuwe getallen in te voeren van de vorm $a \cdot b^{-1}$ ($a \in \mathbf{G}$, $b \in \mathbf{G}\backslash\{0\}$).

Na deze inleiding gaan we wetenschappelijk verder.

Aan ons uitgangspunt voegen we toe: een verzameling $\mathbf{Q}$, een afbeelding h.

Nieuwe axioma's:

Q1. $\mathbf{G} \subset \mathbf{Q}$.
Q2. h is een surjectie van $\mathbf{G} \times \mathbf{G}\backslash\{0\}$ naar $\mathbf{Q}$ met de volgende twee

eigenschappen:
a. $h(a, b) = c \wedge c \in \mathbf{G} \Leftrightarrow a = bc$,
b. $h(a, b) = h(c, d) \Leftrightarrow ad = bc$.

Opmerkingen. Q2b is uit Q2a afleidbaar voor het geval, dat $h(a, b) \in \mathbf{G}$.

Strikt genomen is Q1 overbodig, omdat Q1 afleidbaar is uit Q2a. Intuïtieve interpretatie zal wel overbodig zijn. De lezer herkent in $h(a, b)$ het toekomstige quotiënt a/b.

Na definiëring van een volgorde, optelling en vermenigvuldiging ontstaat het stelsel van de rationale getallen.

Deze wetenschappelijke fundering van het rationale getal vertoont veel overeenkomst met hetgeen bij het vwo geschiedt of kan geschieden. Eerst wordt duidelijk gemaakt, dat we b.v. geen getal hebben, dat het quotiënt is van 2 en 3. Met behulp van de getallenlijn wordt nu de betekenis van $\frac{2}{3}$ duidelijk. Voorlopig is het nog alleen maar een getal, dat bij een bepaald punt op de lijn staat. De schrijfwijze $\frac{2}{3}$ is dus eigenlijk niet verantwoord, maar dat kunnen we de leerling moeilijk duidelijk maken. We schrijven dus $\frac{2}{3}$. Daarna maken we duidelijk, dat b.v. $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$. Hier maken we een wetenschappelijke fout, want dit berust op een afspraak en niet op een redenering. Maar goed, we zouden ook kunnen zeggen, dat we voor de leerling deze afspraak acceptabel maken. En ten slotte definiëren we een volgorde, optelling en vermenigvuldiging. Hierbij houden we telkens een redenering om de leerling deze definities aannemelijk te maken. Maar daar is uit wetenschappelijk oogpunt niets tegen. Ook de wetenschapsman zal een verklaring geven, waarom hij de definities kiest. En bij hem is het verlangen de formele rekenwetten te handhaven, wat hem doet besluiten de definities te geven. In de grond van de zaak loopt dit wetenschappelijk verlangen parallel met het verlangen van de leraar plausible definities te geven. Het wetenschappelijk verlangen is immers de definities zo te geven, dat de fundamentele rekenwetten, zoals commutatieve, associatieve en distributieve eigenschappen, van kracht blijven. En als men analyseert, waarom men schooldefinities plausibel vindt, dan blijkt in de grond van de zaak dit ook te zijn, doordat deze rekenwetten gehandhaafd blijven. [1])

---

[1]) Voorbeeld. Waarom is $3 \cdot -5 = -15$? Schoolantwoord: want $3 \cdot -5 = (-5) + (-5) + (-5)$. Wel, dat wil eigenlijk zeggen, dat we de distributieve eigenschap wensen te handhaven. En waarom is nu $-5 \cdot 3 = -15$? Omdat $3 \cdot -5 = -15$. D. w. z. omdat we de commutativiteit van de vermenigvuldiging willen handhaven. Wie deze voorbeelden niet gelukkig vindt, mag zelf andere bedenken. Vermoedelijk komt hij dan toch tot dezelfde conclusie.

4. Slotopmerking. Merkwaardig is, dat we bij het invoeren van de rationale getallen gedwongen worden een methode te volgen, die dicht ligt bij de in de aanvang genoemde vorming van ekwivalentieklassen van paren. Invoeren van rationale getallen is op school nu eenmaal ingewikkelder dan invoeren van gehele getallen. Dit vindt wetenschappelijk zijn weerspiegeling in de axioma's **Q**1–2. Deze zijn minder eenvoudig dan **G**1–2.

Fascinerend is natuurlijk, dat de in de aanvang genoemde wetenschappelijke methode zo simpel is, doordat invoeren van **G** en van **Q** op geheel dezelfde manier verloopt. Is het raadzaam daarom ook de gehele getallen volgens de meer ingewikkelde manier in te voeren? Persoonlijk zou ik deze vraag ontkennend willen beantwoorden. Waarmee ik niet bedoel, dat onderzoekingen in deze richting niet welkom zouden zijn.

DE EINDEXAMENS 1969

Deze keer drukken wij hierbij niet alleen af de opgaven die voorgelegd werden aan de kandidaten van de experimenterende vwo-scholen en van de havoscholen [1]), maar ook die voor het mavo-3, programma B (het nieuwe programma). Dit examen bestaat uit 2 onderdelen: wiskunde I, dat in meerkeuze vorm gebracht werd en wiskunde II, dat op traditionele wijze geexamineerd werd.

ALGEBRA-VWO (2½ uur)

1. De functie f is gedefinieerd door $f(x) = -x\,e^x$.
   a. Welke waarden kan $f(x)$ aannemen?
   b. Teken de grafiek van f.
   c. Druk de oppervlakte van het gesloten vlakdeel dat begrensd wordt door de grafiek van f, de X-as en de lijn $x = a$ $(a < 0)$ uit in a.
   Bereken de limiet van deze oppervlakte als $a \to -\infty$.

2. Gegeven is het stelsel krommen gedefinieerd door $y = pe^x - x - 1$.
   a. Teken in één figuur de drie krommen van het stelsel waarvoor $p = 1$, waarvoor $p = 0$ en waarvoor $p = -1$.
   b. Welke van de krommen van het stelsel hebben een raaklijn die evenwijdig aan de X-as is?
   Wat is de verzameling van de raakpunten van deze raaklijnen?
   c. Welke van de krommen van het stelsel raakt de lijn $y = x$?

3. Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} - xy = 1 - x^2$.

---

[1]) Zie Euclides **42**, p. 281 (opgaven 1967), en **43**, p. 298 (1968).

a. Teken de verzameling van de punten (x, y) waarin het door de differentiaalvergelijking bepaalde lijnelement een richtingscoëfficiënt 1 heeft.
b. Teken de verzameling van de punten (x, y) waarin het door de differentiaalvergelijking bepaalde lijnelement een richtingscoëfficiënt heeft die groter dan 1 is.
c. Welke lineaire functie voldoet aan de differentiaalvergelijking?
d. Los de differentiaalvergelijking op.

STEREOMETRIE-VWO ($2\frac{1}{2}$ uur)

In de volgende vraagstukken hebben de gebruikte coördinaten betrekking op een positief georiënteerde orthonormale basis van de ruimte.
De afkorting p.v. betekent parametervoorstelling.

1. Gegeven zijn het vlak V met vergelijking $x_1 - x_2 + x_3 = 2$,
de lijn l met p.v. $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ en het punt $P : \begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$.
a. Stel een p.v. op van de lijn die gaat door P, die l snijdt en die parallel loopt met het vlak V.
b. Het vlak V is het middelloodvlak van het lijnsegment PQ.
Bereken de coördinaten van Q.

2. Gegeven zijn de lijn l met p.v. $\begin{pmatrix}0\\-5\\-1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$
en de lijn m met p.v. $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$.
a. Bewijs dat de verzameling van de middens van de lijnsegmenten die een punt van l met een punt van m verbinden het vlak V is met vergelijking $2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3 = 0$.
b. Bereken de afstanden $d(l, V)$ en $d(l, m)$.

3. Gegeven zijn het vlak V met vergelijking $x_1 + x_2 - 2x_3 + 1 = 0$,
het vlak W met vergelijking $x_1 + 2x_2 - x_3 - 6 = 0$ en
de lijn l met p.v. $\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.
a. Stel een vergelijking op van de bol die V en W raakt en waarvan het middelpunt op l ligt.
b. Het middelpunt van een bol die V raakt ligt op l; de straal van de bol is $2\sqrt{6}$.
Bereken de straal van de snijcirkel van deze bol met W.

4. De vectoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$ spannen het viervlak $OABC$ op.
Van dit viervlak is gegeven dat $OA \perp BC$ en $OB \perp AC$.
a. Bewijs dat $OC \perp AB$.
b. Bovendien is gegeven $A : \begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$ en $B : \begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix}$
en de inhoud van viervlak $OABC$ is 9.
Bereken de coördinaten van C.

GONIOMETRIE EN ANALYTISCHE MEETKUNDE-VWO (2½ uur)

1. De in dit vraagstuk gebruikte coördinaten hebben betrekking op een orthonormale basis van het vlak.
Gegeven zijn de cirkel C_1 met vergelijking $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 + 4x_2 + 3 = 0$ en de cirkel C_2 met vergelijking $x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 + 4x_2 + 21 = 0$.
   a. Bewijs dat er een lijn bestaat die beide cirkels raakt en die een richtingsvector $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ heeft.
   b. Stel een vergelijking op van de verzameling van de punten P waarvoor de som van de machten van P ten opzichte van C_1 en C_2 gelijk aan 10 is. Teken deze verzameling.

2. De in dit vraagstuk gebruikte coördinaten hebben betrekking op een orthonormale basis van het vlak.
Gegeven zijn de punten $A : \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ en $B : \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.
   a. Op de lijn door punt O en $\perp AB$ ligt punt S zo dat $AS \perp BS$.
   Bereken de coördinaten van de punten S.
   b. Lijn l door punt A en lijn m door punt B zijn evenwijdig; de afstand $d(l, m) = 3$.
   Stel vergelijkingen van l en m op.

3. Gegeven is dat $\underline{\underline{i}} = \{\underline{i_1}, \underline{i_2}\}$ een basis is van het vlak
en dat $\underline{\underline{i}}' = \{\lambda \underline{i_1} + \underline{i_2}, \mu \underline{i_1} + \lambda \underline{i_2}\}$ een andere basis is van het vlak.
   a. Bewijs dat dit dan en slechts dan geldt als $\mu \neq \lambda^2$.
   b. Voor een vector $\underline{p}$ geldt dat $\underline{\underline{i}}(\underline{p}) = \begin{pmatrix}7\\-5\end{pmatrix}$ en $\underline{\underline{i}}'(\underline{p}) = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.
   Bereken λ en μ.
   c. Voor een vector $\underline{q}$ geldt dat $\underline{\underline{i}}(\underline{q}) = \begin{pmatrix}k\\k\end{pmatrix}$ en $\underline{\underline{i}}'(\underline{q}) = \begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$.
   Welke waarden kan k niet aannemen?

4. De functie f is voor $0 \leqq x \leqq 2\pi$ gedefinieerd door $f(x) = \dfrac{2 \sin x}{1 - 2 \sin x}$.
   a. Los op de vergelijking $f(x) = \sin x$.
   b. Bereken de uiterste waarden van de functie.
   c. Teken de grafiek van f.

WISKUNDE-HAVO (3 uur)

1. Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY is gegeven de parabool met vergelijking $y^2 = 4x$ en het punt $P(1, 2)$.
   a. Stel de vergelijking op van de lijn die de parabool in P raakt.
   b. Stel de vergelijking op van de cirkel waarvan het middelpunt op de Y-as ligt en die de parabool in P raakt.

2. De rij 2, x, y, $x^2 + 8x$ bestaat uit vier verschillende termen.
   a. Bereken x en y als de rij rekenkundig is.
   b. Bereken x en y als de rij meetkundig is.

3. De functies f en g zijn voor $0 \leqq x \leqq \pi$ gedefinieerd door

$$f(x) = 1 - \sin x \text{ en } g(x) = \cos 2x.$$

   a. Los op de vergelijking $f(x) = g(x)$.
   b. Teken in één figuur de grafieken van f en g.
   c. De lijn $x = p$ snijdt de grafiek van f in A en de grafiek van g in B.
   De raaklijn in A aan de grafiek van f is evenwijdig aan de raaklijn in B aan de grafiek van g.
   Bereken $\sin p$.

4. In een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ zijn alle ribben even lang. Het midden van de ribbe CT is het punt P.
   Neem $AB = 8$ cm.
   a. Construeer in een stereometrische figuur van de piramide de doorsnede van de piramide met het vlak dat door A en P gaat en dat evenwijdig aan BT is.
   b. Bereken $\angle BPD$.

5. De functie f is voor $-3 \leqq x \leqq 5$ gedefinieerd door $f(x) = \dfrac{4x - 4}{x^2 + 3}$.
   a. Bereken de hoek waaronder de grafiek van f de X-as snijdt.
   b. Bereken de uiterste waarden van deze functie en onderzoek van welke aard deze uiterste waarden zijn.

6. Beschouw ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY de verzameling V van de punten (x, y) waarvoor geldt:

$$x \geqq 0 \quad \text{en} \quad 1 \leqq y \leqq 5 \quad \text{en} \quad x + y \leqq 6.$$

   a. Teken en arceer de verzameling V.
   b. Teken de deelverzameling van V waarvoor geldt: $x + 2y = 6$.
   Teken de deelverzameling van V waarvoor geldt: $x + 2y = 8$.
   c. Wat is de maximale waarde die $x + 2y$ kan aannemen?

WISKUNDE I MAVO-3 - PROGRAMMA B ($1\frac{1}{2}$ uur)

Bij elk van de volgende opgaven staan vier antwoorden vermeld, voorafgegaan door de letters a, b, c en d. Eén van deze antwoorden is goed. Teken een kringetje om de letter voor het goede antwoord.

1. Bij een spiegeling ten opzichte van de x-as wordt het beeld van elk punt (p, q):

   a. $(-p, q)$; b. $(p, -q)$; c. $(-p, -q)$; d. $(-q, -p)$.

2. Men spiegelt een punt (p, q) ten opzichte van de y-as en het beeld spiegelt men ten opzichte van de x-as.
   Na deze twee spiegelingen is het beeld van het punt (p, q):

   a. $(-p, q)$; b. $(p, -q)$; c. $(-p, -q)$; d. $(-q, -p)$.

3. Als $(9, 2) \in \{(x, y) | 5x + py = 39\}$, dan is p gelijk aan

a. -6; *b*. -3; *c*. 3; *d*. dat kan men niet weten.

4. De afstand van de punten (1, 2) en (4, -3) ligt het dichtst bij:

a. 5,7; *b*. 5,8; *c*. 5,9; *d*. 6.

5. Bij een translatie gaat het punt (3, -4) over in het punt (-4, 3).
Bij deze translatie gaat het punt (-5, 2) over in het punt:

a. (2, -5); *b*. (-2, 9); *c*. (-2, -5); *d*. (-12, 9).

6. De oppervlakte van een gelijkzijdige driehoek met zijde 2 is gelijk aan

a. $\sqrt{3}$; *b*. 2; *c*. $\sqrt{5}$; *d*. $2\sqrt{3}$.

7. Van een rechthoek is de lengte tweemaal zo groot als de breedte.
De omtrek is 24. De oppervlakte is

a. 16; *b*. 32; *c*. 36; *d*. 72.

8. De grafiek van de relatie $3x - 4y = 12$ snijdt de x-as in een punt waarvoor $x = p$ en de y-as in een punt waarvoor $y = q$.

a. $p = -4$ en $q = -3$;
b. $p = -4$ en $q = 3$;
c. $p = 4$ en $q = -3$;
d. $p = 4$ en $q = 3$.

9. De oplossingsverzameling van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ x - 4y = 7 \end{cases}$$

bestaat uit een getallenpaar (x, y) waarvoor geldt

a. x en y zijn beide positief;
b. x is positief en y is negatief;
c. x is negatief en y is positief;
d. x en y zijn beide negatief.

10. Van twee cirkels verhouden zich de stralen als 2 : 3.
I. Hun omtrekken verhouden zich als 2 : 3.
II. Hun oppervlakten verhouden zich als 4 : 9.

a. I en II zijn beide waar;
b. I is waar en II is niet waar;
c. I is niet waar en II is waar;
d. I en II zijn beide niet waar.

11. Van $\triangle ABC$ is $\angle B$ recht, $AB = 7$ en $BC = 4$. Dan is

a. $AC > 8$ en $\angle A > 30°$
b. $AC > 8$ en $\angle A < 30°$
c. $AC < 8$ en $\angle A > 30°$
d. $AC < 8$ en $\angle A < 30°$

12. A = {gelijkbenige driehoeken},
B = {rechthoekige driehoeken},
C = {gelijkzijdige driehoeken},

Dan geldt:
$a.\ A \cap B = \emptyset$; $b.\ A \cap C = \emptyset$; $c.\ B \cap C = \emptyset$;
d. geen van deze beweringen is juist.

13. De breuk $\frac{3x - 4}{2x - 1}$ heeft de waarde 0 voor:

a. $x = \frac{1}{2}$; *b.* $x = 1\frac{1}{3}$; *c.* $x = \frac{1}{2}$ en $x = 1\frac{1}{3}$; *d.* $x = 3$.

14. Gegeven een hoek α tussen 0° en 45°.
I. $\sin\alpha > \tan\alpha$.
II. $\sin\alpha > \cos\alpha$.
   a. I en II zijn beide waar;
   b. I is waar en II is niet waar;
   c. I is niet waar en II is waar;
   d. I en II zijn beide niet waar.

15. De oplossingsverzameling van $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$ bestaat uit drie elementen. Deze verzameling is:
a. $\{-3, -2, 1\}$; *b.* $\{-3, -2, -1\}$; *c.* $\{-3, 2, 1\}$; *d.* $\{3, 2, 1\}$.

16. De zijden van $\triangle ABC$ zijn 2, 3 en 4.
$\triangle PQR$ is gelijkvormig met $\triangle ABC$.
Een zijde van $\triangle PQR$ is 12.
Dan kan de omtrek van $\triangle PQR$ *niet* gelijk zijn aan
a. 27; *b.* 36; *c.* 45; *d.* 54.

17. $(x - 3)^2 = (x - 3)(x + 3)$ is juist voor
a. alle waarden van x;
b. twee waarden van x;
c. slechts één waarde van x;
d. geen enkele waarde van x.

18. Gegeven $f(x) = px + q$.
$f(0) = -1$ en $f(1) = 0$. Dan geldt:
a. $p = 1, q = 1$; *b.* $p = 1, q = -1$; *c.* $p = -1, q = 1$;
d. $p = -1, q = -1$.

19. I. De grafieken van $x \to 3x - 2$ en $x \to -3x - 2$ zijn evenwijdig.
II. De grafieken van $x \to 3x - 2$ en $x \to 3x + 2$ zijn evenwijdig.
   a. I en II zijn beide waar;
   b. I is waar en II is niet waar;
   c. I is niet waar en II is waar;
   d. I en II zijn beide niet waar.

20. De grafiek van een functie f, gedefinieerd door $f(x) = x$,
a. valt samen met de x-as;
b. is een lijn evenwijdig aan de x-as;
c. is een lijn loodrecht op de x-as;
d. geen van deze.

21. Een verzameling palen bestaat uit 6 palen van 1 m, 11 palen van 2 m, 2 palen van 3 m, 5 palen van 4 m en 9 palen van 5 m.

I. Als men deze 33 palen in volgorde van grootte plaatst, heeft de middelste paal een lengte van 3 m.
II. De gemiddelde lengte van alle palen is precies 3 m.

a. I en II zijn beide waar;
b. I is waar en II is niet waar;
c. I is niet waar en II is waar;
d. I en II zijn beide niet waar.

22. De grafiek van een functie, gedefinieerd door $f(x) = x^2 - 4$, heeft als symmetrie-as de grafiek van:

a. $x = 0$; *b.* $x = 4$; *c.* $x = -2$; *d.* $x = 2$.

23. De grafiek van een functie f, gedefinieerd door $f(x) = x^2 + 4x + 4$, heeft als top:

a. $(2, 0)$; *b.* $(-2, -2)$; *c.* $(-4, 4)$; *d.* $(-2, 0)$.

24. Het produkt van twee getallen is positief als
I. het kleinste getal positief is.
II. het grootste getal negatief is.

a. I en II zijn beide waar;
b. I is waar en II is niet waar;
c. I is niet waar en II is waar;
d. I en II zijn beide niet waar.

25. Een jongen heeft vier truien, drie broeken en twee mutsen.
Op hoeveel verschillende manieren kan hij zich hiermee kleden?

a. 9; *b.* 14; *c.* 20; *d.* 24.

WISKUNDE II MAVO-3 - PROGRAMMA B ($1\frac{1}{2}$ uur)

1. Teken twee lijnen die elkaar onder een hoek van 60° snijden.
Noem de lijnen l en m en hun snijpunt S.
   a. Teken nauwkeurig de verzameling A van de punten, die een afstand van 3 cm tot l hebben.
   b. Teken nauwkeurig de verzameling B van de punten, die een afstand van 5 cm tot S hebben.
   c. Bereken de oppervlakte van de figuur die de elementen van $A \cap B$ tot hoekpunten heeft.
   d. Construeer de verzameling C van de punten die evenver van l en m liggen.
   e. Kleur of arceer de verzameling van de punten die aan de volgende drie voorwaarden voldoen:
   ze liggen minder dan 5 cm van S,
   ze liggen meer dan 3 cm van l, en
   ze liggen dichter bij m dan bij l.

2. Teken een rechthoek $ABCD$ met $AB = 8$ en $AD = 6$.
Het snijpunt van de diagonalen is S.
De middens van de zijden AB, BC, CD en DA zijn opvolgend E, F, G en H.

a. Bereken van $\angle BAC$ de sinus, de cosinus en de tangens.
b. Bereken de scherpe hoek waaronder de diagonalen elkaar snijden in minuten of decigraden nauwkeurig.

Door AC, BD, EG en FH is de rechthoek in driehoeken verdeeld.

c. Noem een driehoek die door een lijnspiegeling uit $\triangle AES$ kan worden verkregen. Welke is de as van spiegeling?
Noem een driehoek die door een puntspiegeling uit $\triangle AES$ kan worden verkregen. Wat is het centrum van spiegeling?
Noem een driehoek die door een translatie uit $\triangle AES$ kan worden verkregen. Noem een lijnstuk dat door zijn lengte en richting de translatie bepaalt.
d. $\triangle SHD$ kan door twee opeenvolgende transformaties uit $\triangle AES$ worden afgeleid. Welke zijn dit? Vermeld daarbij bijzonderheden zoals in *c* wordt gevraagd.
e. Door welke transformatie kan $\triangle ABC$ uit $\triangle AES$ worden verkregen?

3. Gegeven de getalverzameling $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
en de puntverzameling $P = \{(x, y)|x \in A \text{ en } y \in A\}$.

a. Teken de verzameling P ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY.
b. Teken in dezelfde figuur de grafieken van de lineaire relaties.

$$V = \{(x, y)|2x - y = 2\} \text{ en } W = \{(x, y)|x + 2y = 4\},$$

waarbij x en y reële getalen zijn.
c. Bepaal met behulp van de figuur $V \cap P$ en $W \cap P$ en schrijf de elementen van beide verzamelingen op.
d. Bepaal door berekening $V \cap W$.
Wat is nu $(V \cap W) \cap P$?

4. Een functie is gedefinieerd door $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$.

a. Los op $f(x) = 0$.
b. Beredeneer dat $f(x)$ een kleinste waarde heeft.
c. Los op $f(x) = x$ in één decimaal nauwkeurig.
d. Teken een grafiek van de functie voor $-3 \leqq x \leqq 4$.

MATHEMATICA & PAEDAGOGIA

Gaarne wijzen wij eens op dit tijdschrift van de Belgische Vereniging van Wiskundeleraars, dat thans weer regelmatig — driemaandelijks — in fraaie uitvoering verschijnt. Het geeft ons goede, didactisch georiënteerde artikelen (tweetalig).

Men kan zich als lid van de vereniging aanmelden door het overmaken van de jaarlijkse contributie, 150 BF (ongeveer ƒ 11,—) naar postrekening 728014 t.n.v. de Vereniging, Quartier de l'Europe 126, Châtelineau (België) en is dan van de toezending van het blad verzekerd. (red.)

KORREL CL

Een bekend vraagstuk over het vierkant

1. Voor het oplossen van een bijzonder moeilijk vraagstuk wil ik in de klas in een royale bui nog wel eens een geldprijsje beschikbaar stellen. Zo heb ik rijksdaalder-, vijf gulden- en tientje-sommen, waarbij ik wel wil aantekenen, dat een tientje alleen dan wordt uitgeloofd, als ik er wel haast zeker van ben, dat geen enkele leerling het opgegeven vraagstuk zal vinden. Een voorbeeld van zo'n opgave is de volgende som:

In $\triangle ABC$ *is* $\alpha = \beta = 80°$. *Op* AC *ligt* D *zo, dat* $\angle DBA = 60°$ *en op* BC *ligt* E *zo, dat* $\angle EAB = 50°$. *Bewijs:* $\angle EDB = 30°$,

die daarom zo interessant is, omdat hij zo eenvoudig lijkt, toch bepaald niet gemakkelijk is en desondanks met de stof van het eerste jaar meetkunde-onderwijs kan opgelost worden. Zegt men dit laatste erbij, dan valt de klas er direct op aan.

Zij nog vermeld, dat deze opgave door prof. dr. G. R. Veldkamp, R. Troelstra en mij uitvoerig besproken is in *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* (Jg. 51, blz. 168 e.v. en jg. 52, blz. 98 e.v.) en voorts, dat hij grote verwantschap vertoont met die van dr. J. T. Groenman in dit tijdschrift, jg. 38 blz. 254 en 288.

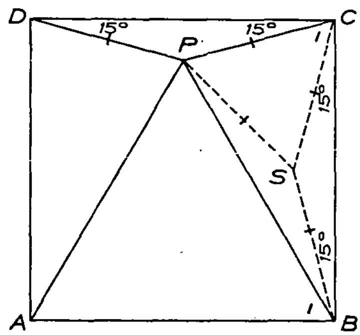
2. Kort geleden gaf ik het min of meer bekende sommetje:

Binnen het vierkant $ABCD$ *ligt* P *zo, dat* $\angle PCD = \angle PDC = 15°$. *Bewijs, dat* $\triangle PAB$ *gelijkzijdig is,*

op (uit de „rijksdaalder-rubriek"), dat men bv. vindt in P. Wijdenes, Vlakke Meetkunde voor voortgezette studie. (3e druk, blz. 30 nr. 45). Ik ken één schoolboek (Bos en Lepoeter, Wegwijzer in de meetkunde; dl. 3, blz. 115) waarin dit vraagstuk besproken wordt en waar het dienst doet als voorbeeld van een opgave, die met een *indirect* bewijs opgelost kan worden.

Nu ontving ik van twee leerlingen twee directe bewijzen (kosten mijnerzijds dus *ƒ* 5.—), die m.i. de moeite van het vermelden waard zijn. Ten gerieve van deze leerlingen vermeld ik bij de bewijzen hun namen.

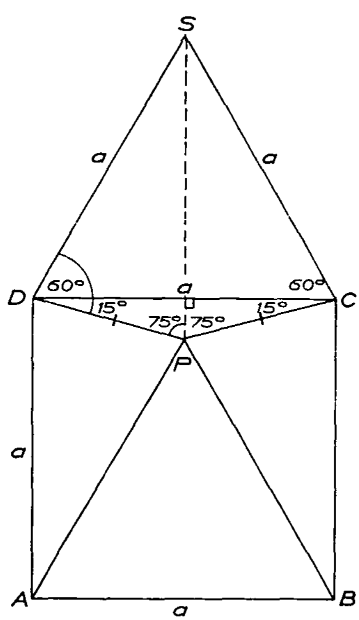
3. *Eerste oplossing* (H. Stunnenberg):



Figuur 1

Maak $\angle SCB = \angle SBC = 15°$, dan is $CP = CS$ en $\angle C_1 = 60°$, dus $\triangle PCS$ is gelijkzijdig; $\triangle PSB \cong \triangle CSB$, waaruit volgt: $PB = BC = AB$ en $\angle B_1 = 60°$, dus $\triangle APB$ is gelijkzijdig.

Tweede oplossing (R. Sinninghe):



Figuur 2

Maak $\triangle DSC$ gelijkzijdig, dan is $DPCS$ een vliegerfiguur en er geldt $AD = DS = PS$ $(= a)$ en $AD \,//\, PS$, bijgevolg is $APSD$ een pgm., dus $AP = a$ en evenzo $BP = a$.

4. De bewijzen, die Wijdenes in het antwoordenboekje van zijn vermeld boek geeft, zijn de volgende:

a) De bekende „slimme truc'' van de constructie van de gelijkzijdige $\triangle ASB$ binnenwaarts, die dan blijkt samen te vallen met $\triangle APB$.

b) Bepaal het snijpunt E van CP en AD, dat zich op AC in F projecteert, dan is $PC = PD = PE = PF = EF = FA$, waaruit blijkt: $\angle PAF = 15°$ enz.

Een niet voor de hand liggend, maar wel een vernuftig bewijs.

Ede — R. Kooistra

BOEKBESPREKING

Gerrit Bol, *Projective Differentialgeometrie*, 3. Teil; Vendenhoeck en Ruprecht, Göttingen, 1967; VIII + 527 p.; DM 85,—

Het eerste deel van dit zeer uitvoerige leerboek, verschenen in 1950, geeft de projectieve theorie van krommen en de grondbegrippen van de theorie van oppervlakken. In 1954 kwam het tweede deel uit. Om niet te zeer gebonden te zijn door een vaste normering van de homogene coördinaten en de parameters, voert de schrijver een „halfinvariante differentiatie'' in. Daarmee worden oppervlakken en lijnencongruenties in de projectieve ruimte onderzocht.

Het heeft tot 1967 geduurd voor het derde deel verscheen. In de verlopen tijd is de schijver, evenals zijn leermeester Blaschke, gewonnen voor de methode om de differentiaalmeetkunde te behandelen met behulp van „alternerende vormen'' en „uitwendige differentiatie''. Voor de projectieve meetkunde gaat dit echter niet zonder meer, de gebruikte coördinaten zijn immers slechts tot op hun verhouding na bepaald. Door echter met een gewijzigd differentiatiebegrip te werken, blijkt deze methode toch zeer bruikbaar te zijn.

Vele van de in deel I en deel II besproken kwesties komen weer aan de orde, nu behandeld op deze nieuwe wijze en ook uitvoeriger. Men is niet meer gebonden aan een vaste parameterkeuze, waardoor de gevonden resultaten vaak algemener zijn. Een belangrijke plaats in dit deel neemt de behandeling van de lijncongruenties in.

De schrijver hoopt het geheel af te ronden met een vierde deel waarin bijzondere oppervlakken aan de orde zullen komen. Als dit deel voltooid is zal er een standaardwerk over de projectieve differentiaalmeetkunde tot stand gekomen zijn, zowel wat de behandelde stof als wat de te gebruiken technieken betreft.

Aan belangstellenden worden de verschenen delen van harte aanbevolen.

G. W. M. Kallenberg

Dr. Georg Wolff, *Handbuch der Schulmathematik*; Band 7, *Neuere Entwickelungen*; 336 blz.; geb. DM 44,—; Schroedel-Schöningh, Hannover-Paderborn; 1967.

In 1960 verscheen het eerste deel van het *Handbuch der Schulmathematik*, waarvan de omvang oorspronkelijk op zes delen werd vastgesteld. Voor mijn oordeel over deze

reeds verschenen delen verwijs ik naar mijn recensies in Euclides, waarvan de laatste werd opgenomen in de 40e jaargang, blz. 222–223.

In de loop van de laatste tien jaren is het streven naar onderwijsvernieuwing ten aanzien van de wiskunde steeds krachtiger geworden. In verband hiermee groeide de behoefte aan betrouwbare informatie op het gebied van de in gang zijnde modernisering van het wiskunde-onderwijs. Om aan de wensen van de talrijke gebruikers tegemoet te komen is thans aan de serie dit zevende deel toegevoegd dat principieel met de nieuwere gezichtspunten rekening houdt. Dit royaal uitgegeven zevende deel van het handboek is geheel aan de Reform van het wiskunde-onderwijs gewijd.

Het hoge niveau van het werk is te danken aan de omstandigheid dat de Herausgeber Dr. Wolff zich de medewerking heeft weten te verzekeren van een schare bekwame deskundigen; alleen voor dit zevende deel ontmoet ik een reeks van 13 namen.

Het werk is in drie delen onderverdeeld. In deel I komen structurele gezichtspunten aan de orde: verzamelingen, relaties, afbeeldingen, topologische structuren, metamathesis, wiskundige logica. Dit deel is geschreven met de behoeften van de leraar van het voortgezet onderwijs die nieuwere onderwerpen wenst te behandelen voor ogen. Een groot aantal merendeels zeer eenvoudige oefeningen die in de tekst zijn opgenomen, maakt het de docent gemakkelijk de brug naar de dagelijkse schoolpraktijk te slaan.

Het tweede deel houdt zich bezig met de problematiek van een aantal afzonderlijke vakgebieden. Besproken worden: getallenstelsels, vergelijkingen en ongelijkheden, grondslagen van de analyse, meetkunde-didactiek voor de onderbouw (Mittelstufengeometrie), matrices en vectoren.

Het derde deel bevat een aantal toepassingen o.a. op het gebied van de waarschijnlijkheidsleer, de wiskundige analyse van economische problemen, de cybernetica, de schakeltheorie en het binaire rekenen. Zeer belangrijk is het hoofdstuk dat een didactische analyse bevat van het steeds meer in betekenis toenemende geprogrammeerde onderwijs.

Een register voor alle zeven delen, dat meer dan 80 kompres gedrukte kolommen bevat, besluit het geheel.

Onder leiding van dr. Wolff is een magistraal werk tot stand gekomen dat niet slechts voor Duitse leraren van betekenis is. Over welk gebied van de schoolwiskunde de Nederlandse leraar ook inlichtingen moge wensen, dit handboek levert hem de gewenste informatie. De uitvoerige literatuurlijsten aan het eind van elk hoofdstuk stimuleren tot voortgezette studie.

Uit het feit dat reeds een tweede druk voor deel 1–6 nodig is gebleken wordt duidelijk, hoezeer dit werk in een behoefte voorziet en in de smaak is gevallen. Een werk van analoge omvang en strekking kennen we niet. De Nederlandse leraar voor wie de aanschaffing van het volledige handboek een te grote uitgave mocht betekenen (elk deel kost DM 44.—) beginne met de aanschaffing van dit zevende deel, waarin de problemen van vandaag zozeer naar voren komen. Zonder twijfel is dit werk een sieraad voor elke vakbibliotheek in school en huis.

Joh. H. Wansink

Prof. Dr. S. Wiegersma en Dr. M. Groen, *Resultaten van wiskundeonderwijs*, een verslag van een onderzoek door het Nederlands Instituut voor Praeventieve Geneeskunde TNO uitgevoerd in het kader van het International Educational Achievement Project, Empirische studies over onderwijs 8, Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, 1968, X + 141 blz., *f* 13.50.

De bedoeling van het IEA-project was ,,landelijk een beter inzicht te krijgen in de doelstellingen van het onderwijs" en ,,de relatie van de onderwijsresultaten tot verschillende sociale en onderwijskenmerken te onderzoeken". Dat hierbij juist de wiskunde als materiaal gekozen werd, was o.m. omdat daardoor resultaten internationaal beter vergelijkbaar waren.

Onder de zeer vele resultaten van dit onderzoek vermeld ik er enkele:

Wat het prestatieniveau betreft neemt Nederland tussen de deelnemende landen een middenpositie in; aan de spits staat Israël (deelnemende landen: Australië, België, Engeland, Finland, Frankrijk, Israël, Japan, Nederland, Schotland, Verenigde Staten, West-Duitsland, Zweden).

In geen enkel ander land is het doubleerpercentage zo hoog als in Nederland; oorzaak hiervan is vooral een uitzonderlijk streng beoordelingssysteem.

Het percentage kinderen van een leeftijdsklasse, dat preüniversitair onderwijs (hoogste klasse hbs of gymnasium) bereikt, is in Nederland lager dan in alle andere landen.

De aan wiskunde bestede onderwijstijd varieert weinig tussen de verschillende landen, nl. van 11 tot 14 %, voor Nederland is dit percentage 11.

Er is een duidelijk verband tussen sociaal-economisch milieu en leerprestaties bij de jongens van de zesde klasse van de lagere school; bij de meisjes is dit verband veel minder duidelijk.

De prestaties van de leerlingen van gymnasium-B liggen gemiddeld hoger dan die van hbs-B.

Wie meer wil weten, raadplege het verslag. Men kan daar nog veel wetenswaardigs in vinden.

Aan het einde zijn de tien testseries toegevoegd, die voor het onderzoek gebruikt zijn. Hier kan men o.a. de mededeling in vinden (p. 136), dat de functie $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ continu voor alle x is, als $x \neq 1$, hetgeen meer lijkt op preventieve logica.

P. G. J. Vredenduin

Prof. Dr. H. J. A. Duparc, *Inductie en iteratie* (Torusreeks, deel 2), Wolters-Noordhoff n.v., Groningen, 1968, 75 blz., ing. *f* 4.90.

De Torusreeks is een uitgave onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde van het Wiskundig Genootschap. De boekjes zijn bestemd voor leerlingen van de hogere klassen van de middelbare scholen en voor hun leraren, indien zij zich in modernere wiskunde wat willen oriënteren. Naar mijn mening zijn ze ook geschikt voor anderen, niet-wiskundigen, die belang stellen in aspecten van de wiskunde, welke bij hun schoolopleiding nog niet zo opvielen. Ook eerstejaarsstudenten in de wiskunde zullen er hun voordeel mee kunnen doen.

In dit deeltje behandelt prof. Duparc eerst de volledige inductie, voornamelijk aan de hand van de berekening van $\sum_{k=1}^{n} k^p$, van de som van een reken-meetkundige reeks, de binomiaalformule en de reeks van Fibonacci.

Daarna komt de iteratie aan de orde. Het wezen van een iteratief proces wordt uitgelegd met behulp van samengestelde interest, repeterende breuken, de algoritmus voor het bepalen van de grootste gemene deler. Uitvoeriger wordt dan ingegaan op verschillende methoden van iteratieve benadering van wortels van vergelijkingen.

Daar een iteratief proces veelal gemakkelijk door een rekenmachine kan worden

uitgevoerd, is het ongetwijfeld van veel belang, dat deze methodiek in bredere kring bekendheid verwerft.

Naar mijn mening is de schrijver er geheel in geslaagd, dit boekje aan de bedoelingen van de Torusreeks te doen beantwoorden.

H. W. Lenstra

E. W. Beth, *Memorial Colloquium*, Logic and Foundations of Science, Paris, Institut Henri Poincaré, 19–21 May, 1964, Edited by Jean-Louis Destouches, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, 1967, VIII + 136 blz., *f* 21.—.

Beth heeft zeker verdiend, dat er aan zijn nagedachtenis een internationaal colloquium gewijd werd. De inhoud van dit boek laat nogmaals de veelzijdigheid zien van het werkgebied van Beth. In een veelheid van korte bijdragen worden onderwerpen belicht zowel op het terrein van de logica van de wiskunde als op dat van de logica van de fysica, die ook door hem bestudeerd zijn. Een grote plaats is daarbij ingeruimd voor een bespreking van zijn semantische tableaus. J. J. F. Nieland gaat op de betekenis ervan uitvoerig in. Aan het einde vindt men een bibliografie van het werk van Beth.

Aan het boek hebben verder als auteur meegewerkt: Heyting, De Bouvère, Marcel Guillaume, Roland Fraïssé, Mooij, J.-L. Destouches, Patrick Suppes, Cap, Bonjean, Sekine.

Zoals te verwachten is, staat het werk op hoog peil en is het dan ook geen gemakkelijke lectuur.

P. G. J. Vredenduin

A. J. G. Klomp en drs. Joh. Runhaar, *Hogere Wiskunde I in vraagstukken met beknopte theorie*, Nijgh en van Ditmar, 's-Gravenhage, 1968, *f* 17.50.

Dit boek is bestemd voor leerlingen van de H.T.S. De schrijvers zeggen in hun voorwoord, dat met een nog te verschijnen deel II de serie afgesloten is. Het boek doorbladerend valt op, dat een zekere frisheid aanwezig is. Geen langdurige paragrafen over de theorie, maar zeer spoedig confronteren met opgaven. Het is de bedoeling, dat de docent naar eigen inzicht eventueel dieper op de theorie ingaat. Verder is het aantal opgaven zo groot, dat waarschijnlijk lang niet alles gemaakt zal worden.

Mij valt op, dat als standaardformule gegeven is de afgeleide van $1/f$. Het lijkt me beter deze formule achterwege te laten. Verder vraag ik me af wat bedoeld wordt met een *plaatselijk* maximum (pag. 21). Een omschrijving van dit begrip is wenselijk.

Op pag. 30 treffen we nog aan de differentialen van sec en cosec. Ik meende, dat deze functies reeds lang ten grave waren gedragen. Is het niet wenselijk de tangens en cotangens af te korten met tan resp. cot.?

De oefeningen in het differentiëren geven gauw aanleiding tot het aanbieden van functies, die nooit of te nimmer in praktische toepassingen voorkomen. Zo zie ik b.v. op blz. 65 $\sin x^{\ln x^2}$. Ook kan ik mij moeilijk voorstellen, dat de inverse hyperbolische functies veel worden toegepast in de techniek.

Tenslotte kan ik niet erg dwepen met de methode van de invoering van de complexe getallen, maar wellicht is dit voldoende om later de complexe getallen te gebruiken. Overigens lijkt me het boek een grote aanwinst voor de H.T.S. Ik neem aan, dat het veel gebruikt zal worden.

Groeneveld

Unterrichtshefte zur Mathematik von heute; Heft O4; *Analysis* 1, Dr. Hermann Athen, bewerkt door Prof. Dr. Heinz Griesel, Hermann Schroedel Verlag KG, Hannover. 114 blz., 1968, bestel. nr. 85024, prijs DM 7.80.

In het Duitse gymnasizle onderwijs blijkt behoefte te bestaan aan aanvullend materiaal naast de bestaande leerboeken. De ontwikkeling van de wiskunde, ook op schoolniveau gedurende de afgelopen jaren, doen overal in Europa een streven tot modernisering van het leerplan ontstaan. Dit is precies wat de ,,Unterrichtshefte'' bedoelen.

,,Heft O4'' is ontstaan uit de eigen ervaringen van de schrijver, Dr. H. Griesel. Als voornaamste onderwerpen bevat het de theorie van de rijen, de continuïteit en de bepaling van de afgeleiden van functies.

Dit is nog niet veelzeggend, iets wat de wijze van behandeling wel is. Door veelvuldig gebruik van de functies: $[x]$; sign x en $H(x)$ (de Heavyside-functie) wordt het oefenmateriaal verruimd, worden vele voorbeelden gewonnen van discontinue functies en krijgen ook de grafiekbesprekingen meer diepte.

Als definitie van een functie $f : x \to f(x)$, $x \in D$, wordt een eenduidige afbeelding van D in $\mathbf{R}$ gebruikt.

De limietstellingen voor de rijen worden keurig met behulp van nulrijen bewezen; zelfs het criterium van Cauchy wordt aangetoond.

De afgeleide van f in a wordt gedefinieerd als de z.g. ,,Lückenwert'' van $x \to \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, $x \in D \setminus \{a\}$, de z.g. differentiequotiëntfunctie.

Het boekje besluit met een hoofdstuk over inverse functies waarbij de nadruk valt op de cyclometrische- en de wortelfuncties.

De eigenschappen van het lichaam $\mathbf{R}$ (de reëele getallen) worden bekend verondersteld. De bespreking daarvan wordt voor een volgend ,,Heft'' gereserveeerd. Een groot aantal opgaven en vele uitstekende figuren maken het boekje aantrekkelijk.

De omvang van de stof en de algemene behandelingswijze komt aardig overeen met wat wij ons daarover voorstellen in het v.w.o. programma wiskunde 1. Daarom al zou iedere wiskundedocent het ,,Heft'' moeten bestuderen. Er is nog een reden. De wijze van aanpak van diverse onderdelen zou stellig een levendige discussie opleveren. Enkele discussiepunten b.v.:

- Is het convergentie-criterium van Cauchy noodzakelijk? Volgens de schrijver zal het in een volgend ,,Heft'' toepassing vinden.
- De definitie van continuïteit: f is in $a \in D$ continu als a geen discontinuïteitspunt is van f. Dit laatste doet zich voor als er minstens één naar a convergerende rij bestaat zodanig dat de rij van de toegevoegde functiewaarden divergeert.
- Het gebruik van epsilontiek (beperkt) naast het benutten van omgevingen.
- De wenselijkheid van een zóver doorgevoerde exactheid dat het aantal stellingen en hulpstellingen bedenkelijk hoog wordt.

Ik hoop dat uit het bovenstaande duidelijk blijkt dat we hier te maken hebben met een uiterst interessant boekwerkje, dat jammer genoeg ontsierd wordt door een aantal, soms heel hinderlijke, zetfouten. Vooral in het bewijs van Cauchy's kenmerk zijn de zetfouten storend. Desondanks zie ik met bijzondere belangstelling uit naar eventuele volgende ,,Hefte''.

J. J. Wouters

RECREATIE

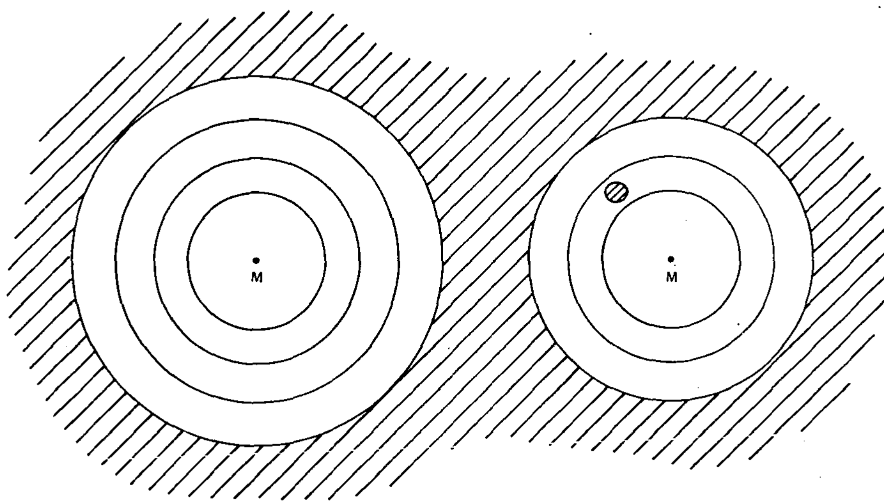
Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Julianaweg 25, Oosterbeek.

218. Vind natuurlijke getallen a, b, c en d, waarvoor

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c} \quad \text{en} \quad \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{d^2}.$$

(B. Kootstra)

219. Hieronder ziet men twee figuren, die niet topologisch ekwivalent (homeomorf) zijn. De gearceerde delen van het vlak behoren niet tot de figuren, de cirkels wel (ook de cirkels, die de gearceerde gebieden begrenzen). Voeg in beide figuren lijnstukken toe, die zelf of waarvan een verlengde het middelpunt M bevatten zo, dat daarna de figuren topologisch ekwivalent zijn. (B. Kootstra)



OPLOSSINGEN

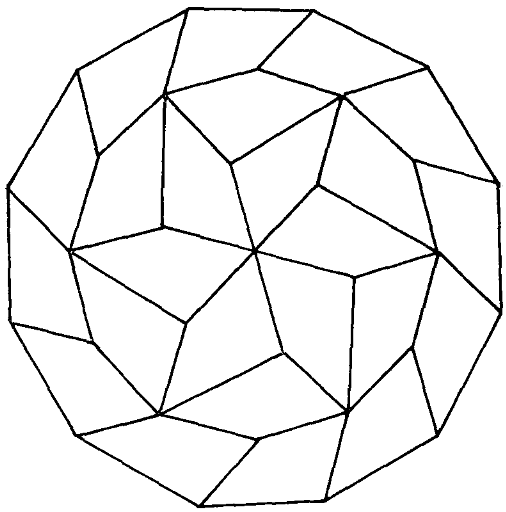
216. Verdeel een regelmatige twaalfhoek in 24 congruente regelmatige veelhoeken zo, dat uit de 24 veelhoeken twee congruente regelmatige twaalfhoeken gevormd kunnen worden.

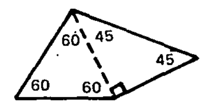
De oplossing ziet men in bijgaande figuur. De 24 delen zijn vierhoeken, die opgebouwd zijn uit een gelijkzijdige driehoek en een gelijkbenige rechthoekige driehoek.

217. Zeven jongens schrijven elke werkdag een brief aan vier meisjes. Op geen enkele dag wordt een meisje geen brief geschreven. Nooit schrijven de jongens alle zeven een brief aan precies dezelfde meisjes als te voren. Willen we nu weten, hoeveel dagen de jongens deze correspondentie kunnen volhouden, dan moeten we uitrekenen, hoe groot het aantal surjecties is van een verzameling van 7 naar een verzameling van 4 elementen.

We lossen dit probleem liever algemeen op. Hoe groot is het aantal surjecties van een verzameling van n elementen naar een verzameling van k elementen ($n \geqq k$)?

Het aantal afbeeldingen van een verzameling V van n naar een verzameling W





van k elementen bedraagt k^n. Dit zijn echter niet allemaal surjecties. We moeten er dus aftrekken alle afbeeldingen, waarbij de verzameling afgebeeld wordt naar een deelverzameling van W van $k - 1$ elementen. Het aantal afbeeldingen van V naar een verzameling van $k - 1$ elementen is $(k - 1)^n$. Het aantal deelverzamelingen van W van $k - 1$ elementen is k. En dus zijn er $k(k - 1)^n$ afbeeldingen van V naar een deelverzameling van $k - 1$ elementen van W. Deze moeten afgetrokken worden van de k^n afbeeldingen. We houden dus over

$$k^n - k(k - 1)^n \text{ afbeeldingen.}$$

Onder de $k(k - 1)$ afbeeldingen van V naar deelverzamelingen van $k - 1$ elementen van W komen verschillende gelijke afbeeldingen voor. Elke afbeelding van V naar een deelverzameling van $k - 2$ elementen komt namelijk 2 maal voor in plaats van 1 maal. Het aantal deelverzamelingen van W met $k - 2$ elementen bedraagt $\binom{k}{2}$. We hebben van k^n dus te veel afgetrokken $\binom{k}{2}(k - 2)^n$. Dit moet er weer bijgeteld worden, waardoor we krijgen

$$k^n - \binom{k}{1}(k - 1)^n + \binom{k}{2}(k - 2)^n \text{ afbeeldingen.}$$

Onder de afbeeldingen van V naar deelverzamelingen van W van $k - 2$ elementen komen weer gelijke voor. Elke afbeelding van V naar een deelverzameling van $k - 3$ elementen komt namelijk 3 maal voor in plaats van 2 maal. Deze moeten er dus nu weer 1 maal bijgeteld worden. We krijgen dan

$$k^n - \binom{k}{1}(k - 1)^n + \binom{k}{2}(k - 2)^n - \binom{k}{3}(k - 3)^n \text{ afbeeldingen.}$$

Zo doorredenerend vinden we als aantal surjecties van V naar W

$$k^n - \binom{k}{1}(k - 1)^n + \binom{k}{2}(k - 2)^n - \ldots \pm \binom{k}{k - 1}1^n.$$

Toegepast op ons voorbeeld vinden we, dat het aantal surjecties van een verzameling van 7 naar een van 4 elementen 8400 bedraagt. Ze kunnen elkaar dus ruim 32 jaar blijven schrijven. Ze waren al 18 jaar, toen ze op reis gingen. Uit een huwelijk 32 later gesloten zullen zeer waarschijnlijk geen kinderen geboren worden.